BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 510.6

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО НАХОЖДЕНИЯ СЕРИЙ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДКЛОНОВ В $P_{2^s\cdot 3^m}$ И В ГРАДУИРОВАННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ $P_{2^s}\otimes P_{3^m}$

***А.А.БАБАЕВ, **С.А.МЕШАИК**
Институт математики и механики НАН Азербайджана
****Гянджинский Государстенный Университет***
ali.babaev@inbox.ru

В настоящей статье предлагается метод последовательного нахождения серий минимальных подклонов как в $P_{2^s\cdot 3^m}$*, так и в градуированных произведениях* $P_{2^s}\otimes P_{3^m}$.

Ключевые слова: m - функция, алгебра Поста, минимальные подклоны

Основные понятия

Пусть, $P_{k_i} = < P_{k_i}; \zeta, \tau, \Delta, \nabla, * >$ -алгебра Поста на множестве $\underline{k}_i = \{0,1,...,k_i - 1\}$; $P_{k_i} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{k_i}^{(n)}$ -множество всех многоместных функций на $\underline{k}_i$ $(i = 1,2,...,m)$; $P_{k_i}^{(n)}$-все n-местные функции, действующие на множестве $\underline{k}_i$ [1]. $\zeta, \tau, \Delta, \nabla, *$ - алгебраические операции (суперпозиции) ($f \in P_k$):

1) ζ , где $(\zeta f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1)$;
2) τ , где $(\tau f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = f(x_2, x_1, x_3, ..., x_n)$;
3) Δ , где $(\Delta f)(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;
4) ∇ , где $(\nabla f)(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}) = f(x_2, x_3, ..., x_{n+1})$;
5) $*$, где $(f * g)(x_1, x_2, ..., x_{m+n-1}) = f(g(x_1, x_2, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_{m+n-1})$.

Будем считать, что все $\underline{k}_i$ различны и не пересекаются. Под прямым произведением алгебр Поста будем понимать произведение их как градуированных алгебр, элементами которого являются векторы функций из $P_{k_i}\left(i=1,2,...,m\right)$ одинаковой арности с операцией покоординатной суперпозиции.:

$$P_{k_1}\otimes...\otimes P_{k_m}=<\bigcup_{n=1}^{\infty}P_{k_1}^{(n)}\times...\times P_{k_m}^{(n)};\zeta,\tau,\Delta,\nabla,*>$$

где операции суперпозиции определяются как в некой подалгебре алгебры $P_{k_1\cdot...\cdot k_m}$ [1].

Функции из $P_{k_1}\otimes...\otimes P_{k_m}$ называются m-функциями.

В работе [5] m-функции определяются «классическим» методом, т.е. описывается их разложение по переменным.

Определение ([5]): m-функцией $f\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ алгебры $P_{k_1}\times...\times P_{k_m}$ от n переменных $X_1,X_2,...,X_n$ будем называть функцию, принимающую значения из $\underline{k_1}\times...\times\underline{k_m}$ и с аргументами, также принимающими значения из $\underline{k_1}\times...\times\underline{k_m}$, которая удовлетворяет следующему условию:

$f\left(X_1,X_2,...,X_n\right)=<f_1(x_{11},x_{21},...,x_{n1}),f_2\left(x_{12},x_{22},...,x_{n2}\right),...,f_m(x_{1m},x_{2m},...,x_{nm})>$,

где $X_i=<x_{i1},x_{i2},...,x_{im}>,\ x_{ij}\in E_{k_j},\ i=1,2,...,n;\ f_j=\left(x_{1j},x_{2j},...,x_{nj}\right)$-функции алгебры логики P_{k_j}, $j=1,2,...,m$.

Метод последовательного нахождения серий минимальных подклонов $P_{2^s\cdot3^m}$ и в градуированных произведениях $P_{2^s}\otimes P_{3^m}$

Рассматриваются значения $k\geq4$ вида $2^s\cdot k^m$, так как в P_2 и в P_3 минимальные подклоны уже найдены [2, 4]; отметим, что при $k\geq4$ минимальные в P_k подклоны до сих пор не найдены, известны лишь их возможные типы [4].

С использованием этой информации в [6] найдены все минимальные подклоны градуированных произведений $P_2\otimes P_2,P_2\otimes P_3,P_3\otimes P_3$. Градуированные произведения $P_s\otimes P_m$ впервые были рассмотрены в [1].

При $s>3,m>3$ нахождения минимальных подклонов в $P_s\otimes P_m$ до настоящего времени не осуществлено.

Здесь предлагается метод последовательного нахождения серий минимальных подклонов как в $P_{2^s\cdot3^m}$, так и в градуированных произведениях $P_{2^s} \otimes P_{3^m}$; этот метод использует введенное нами в [5] вложение $\mu : P_k \otimes P_m \to P_{k\cdot m}$. Начнем со случая $k = 4 = 2^2 \cdot 3^0$. В [3] были перечислены все минимальные подклоны в $P_2 \otimes P_2$, и их оказалось 22.

В нижеприводимых таблицах указаны их образы в P_4 при упомянутом вложении μ; точнее говоря, будут указаны (как в левых, так и в правых частях таблицы) порождающие элементы минимальных подклонов. Каждый минимальный подклон (как в P_k, так и в градуированных произведениях) является 1-порожденным.

В таблицах 1, 2, 3 мы указываем μ-образы унарных, бинарных и одной миноритарной функции, соответственно, порождающих минимальных подклонов в P_k.

Таблица 1

Порождающие пары функций минимальных подклонов в $P_2 \otimes P_2$	Их μ-образы в P_4						
	x	0	1	2	3		Другие обозначения
$u_{0,0}$		0	0	0	0	u_1	f_1
$u_{0,3}$		1	1	1	1	u_2	f_2
$u_{3,0}$		2	2	2	2	u_3	f_3
$u_{3,3}$		3	3	3	3	u_4	f_4
$u_{3,1}$		2	3	2	3	u_5	f_5
$u_{1,0}$		0	0	2	2	u_6	f_6
$u_{0,1}$		0	1	0	1	u_7	f_7
$u_{1,3}$		1	1	3	3	u_8	f_8
$u_{1,2}$		1	0	3	2	u_9	f_9
$u_{2,2}$		3	2	1	0	u_{10}	f_{10}
$u_{2,1}$		2	3	0	1	u_{11}	f_{11}

Таблица 2

Идемпотентные порождающие минимальных подклонов в $P_2 \otimes P_2$	x	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	Их μ-образы в P_4
	y	0	1	2	3	1	2	3	0	2	3	0	1	2	3	
$b_{0,0}$		0	0	0	0	1	0	1	0	2	2	0	1	2	3	f_{12}
$b_{0,1}$		0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	3	3	f_{13}
$b_{1,0}$		0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	2	3	1	3	f_{14}

$b_{1,2}$		0	1	0	1	1	0	1	2	2	3	2	3	2	3	f_{15}
$b_{1,3}$		0	1	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	3	f_{16}
$b_{3,3}$		0	1	2	3	1	3	3	2	2	3	3	3	3	3	f_{17}
$b_{0,3}$		0	1	0	1	1	1	1	0	2	3	1	1	3	3	f_{18}
$b_{3,0}$		0	0	2	2	1	2	3	1	1	1	1	3	1	3	f_{19}
$b_{3,1}$		0	0	2	2	1	3	3	0	2	2	1	1	3	3	f_{20}

Нахождение μ-образа в P_4 миноритарной функции $X+Y+Z \in P_2 \times P_2$, порождающей минимальный подклон.

Таблица 3

x	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	μ-образ $X+Y+Z$
y	1	1	2	2	3	3	2	3	0	2	0	3	1	3	0	2	2	1	
z	2	3	1	3	1	2	3	2	2	0	3	0	3	1	2	1	0	2	
	3	2	3	1	0	1	0	0	3	3	1	1	3	0	1	3	1	0	f_{21}

Наконец μ-образ f_{22} мажоритарной функции $(X \cdot Y + X \cdot Z + Y \cdot Z) \bmod 2$ из $P_2 \otimes P_2$ находится аналогичным образом, но более громоздко. Зная все (или некоторые) минимальные подклоны в $P_2 \otimes P_3, P_3 \otimes P_3$, $P_2 \otimes P_4$ и $P_3 \otimes P_4$, можем выявить некоторые серии минимальных подклонов в алгебрах P_6, P_9, P_8, P_{12} и др. Этот процесс может быть продолжен на более высокие значности вида $k = 2^s \cdot 3^m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ромов Б.А. О решетке подалгебр прямых произведений алгебр Поста конечной степени // Математические модели сложных систем, Киев, ИКАН УССР, 1973, с.156-168.
2. Csakany B. All Minimal Clones on the Three-Element Set // ActaCybernetica, 1983, 6, p. 227-238.
3. Мирзоев Р.Д. Минимальные подалгебры $P_2^{\otimes 2}$ // Вестник Бакинского Университета, №1, 2005
4. Post E. Two Valued Iterative Systems, Princeton, 1941
5. Mirzoyev R. J. An expansion functions of the algebra $P_{k_1} \otimes \ldots \otimes P_{k_m}$, the algebra $P(E_2^2)$ and the algebra of two-valued function over E_2 // Transactions NAS of Azerbaijan, 2004, XXIV, No7, p.143-146.
6. Ali A. Babaev, Rafiq J. Mirzoev, Seymur A. Meshaik. On minimal sub-algebras in algebra $P_k \otimes P_m$ // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan, 2008, XXVIII, p.23-28.
7.

$P_{2^s \cdot 3^m}$ -də VƏ $P_{2^s} \otimes P_{3^m}$ DƏRƏCƏLƏNMİŞ HASİLLƏRİNDƏ MİNİMAL ALTKLONLAR SERİYALARININ ARDICIL TAPILMALARI ÜSULU

A.A.BABAYEV, S.A.MEŞAİK

XÜLASƏ

Məqalədə $P_{2^s \cdot 3^m}$ Post cəbrində və bu cəbrlərin $P_{2^s} \otimes P_{3^m}$ dərəcələnmiş hasillərində minimal altklonlar seriyalarının ardıcıl tapılması üsulu verilir.

Açar sözlər: *m*-funksiya, Post cəbri, minimal altklonlar

METHOD OF CONSECUTIVE DEFINING OF MINIMAL SUBCLONES IN $P_{2^s \cdot 3^m}$ AND IN THE GRADED ALGEBRAS $P_{2^s} \otimes P_{3^m}$

A.A.BABAYEV, S.A.MESHAIK

SUMMARY

The present work offers the method of consecutive finding of series of minimal subclones in $P_{2^s \cdot 3^m}$ and in the graded algebras $P_{2^s} \otimes P_{3^m}$ **.**

Key words: *m*-function, Post algebra, minimal subclones

Поступила в редакцию: 05.11.2015 г.
Подписано к печати: 12.02.2016 г.